

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Коммутативная алгебра
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: И.Г. Эрлих, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 12.02.2024

## Аннотация

Курс условно делится на три части. В первой части планируется осветить линейную алгебру над произвольным кольцом (или "теорию модулей"): увидим, какие есть сходства и различия по сравнению с линейной алгеброй над полем. Классификация конечнопорождённых модулей над областью главных идеалов – это фундаментальный факт, частными случаями которого являются, например, классификация конечнопорождённых абелевых групп и приведение линейного оператора к жордановой форме. Далее курс плавно перетекает в полилинейную алгебру: тензорное произведение, внешняя алгебра, функтор  $\text{Hom}$  и т.п. Тензорное произведение – одна из важнейших конструкций в математике, этот материал будет необходим для дальнейшего изучения теории представлений и гомологической алгебры. Наконец, затронем собственно коммутативную алгебру. Она является фундаментом алгебраической геометрии и алгебраической теории чисел.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Познакомить студентов с основными понятиями, конструкциями и приёмами работы в таких разделах математики, как линейная алгебра (над кольцом) и коммутативная алгебра. Будут даны необходимые знания и навыки для дальнейшего изучения более продвинутых дисциплин, таких как алгебраическая теория чисел, алгебраическая геометрия, теория представлений, гомологическая алгебра.

### Задачи дисциплины

- освоить понятия коммутативной алгебры, кольца, идеалы, многообразия, пересечения, схемы, пучки, дивизоры.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия и конструкции алгебры.

уметь:

- работать с группами, кольцами, полями, тензорами и тензорными алгебрами.

владеть:

- базовыми понятиями алгебры и продвинутыми методами линейной алгебры.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Модули над кольцами, подмодули, фактормодули, теоремы об изоморфизмах	5	5		5
2	Свободные модули, базис, ранг	5	5		15
3	Классификация конечнопорождённых модулей над областью главных идеалов	5	5		10
4	Элементы теории категорий	5	5		20
5	Полилинейная алгебра	10	10		25
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Модули над кольцами, подмодули, фактормодули, теоремы об изоморфизмах

Категория R-Mod: произведения и копроизведения, ядра и коядра.

2. Свободные модули, базис, ранг

Морфизмы свободных модулей: матрицы, замена базиса, нормальная форма Смита.

3. Классификация конечнопорождённых модулей над областью главных идеалов

Эндоморфизмы свободных модулей: характеристический и минимальный многочлены, теорема Гамильтона Кэли, собственные значения и собственные векторы.

4. Элементы теории категорий

Элементы теории категорий: категории, функторы, сопряжённые функторы. Тензорные произведения модулей. Ограничение и расширение скаляров.

5. Полилинейная алгебра

Полилинейная алгебра: симметрическая, внешняя степени, тензорная алгебра. Кольца и модули частных, локализация как функтор на категории модулей, его точность.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Введение в вычислительную математику, [учебное пособие] / И. Б. Петров, А. И. Лобанов. — Москва, ИНТУИТ, 2016.— URL: <https://e.lanbook.com/book/100737> (дата обращения: 13.01.2021). - Полный текст (Режим доступа : из сети МФТИ / Удаленный доступ)

Дополнительная литература

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. Успешное освоение дисциплины требует:

- посещения студентом всех видов аудиторных занятий;

- ведения конспекта в ходе лекционных занятий;
- качественной самостоятельной подготовки к практическим занятиям, активной работы на них;
- активной самостоятельной и аудиторной работы студента;
- своевременной сдачи преподавателю заданий по аудиторным видам работ.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 3  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** И.Г. Эрлих, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Коммутативная алгебра» обучающийся должен:

**знать:**

- основные понятия и конструкции алгебры.

**уметь:**

- работать с группами, кольцами, полями, тензорами и тензорными алгебрами.

**владеть:**

- базовыми понятиями алгебры и продвинутыми методами линейной алгебры.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

1. Модули над кольцами, подмодули, фактормодули, теоремы об изоморфизмах.
2. Категория  $R\text{-Mod}$ : произведения и копроизведения, ядра и коядра.
3. Свободные модули, базис, ранг.
4. Морфизмы свободных модулей: матрицы, замена базиса, нормальная форма Смита.
5. Классификация конечнопорождённых модулей над областью главных идеалов.
6. Эндоморфизмы свободных модулей: характеристический и минимальный многочлены, теорема Гамильтона Кэли, собственные значения и собственные векторы.
7. Элементы теории категорий: категории, функторы, сопряжённые функторы.
8. Тензорные произведения модулей.
9. Ограничение и расширение скаляров.
10. Полилинейная алгебра: симметрическая, внешняя степени, тензорная алгебра.
11. Кольца и модули частных, локализация как функтор на категории модулей, его точность.
12. Целая зависимость, теорема о подъёме, теорема о спуске.
13. Кольца нормирования.
14. Кольца дискретного нормирования, дедекиндовы области.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Теорема Жордана-Гёльдера, длина модуля.
2. Точен ли функтор  $\text{Hom}(M, -)$  слева? Точен ли он справа? То же для функтора  $M \otimes -$  (либо доказать точность, либо привести пример нарушения точности).
3. Кольцо  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Z}_p$ : определение как проективного предела, сложение, умножение, обратимые элементы, поле  $\mathbb{Q}_p$ .  $\mathbb{Z}_p$  – кольцо дискретного нормирования.
4. Пусть  $R$  – область целостности,  $M$  –  $R$ -модуль. Докажите, что  $\text{Tor}(M)$  является подмодулем  $M$ . Приведите пример, когда это утверждение неверно, если  $R$  не является областью целостности.
5. Пусть  $a_1, \dots, a_n$  – элементы коммутативного кольца  $R$ ,  $I = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $F \cong R^n$ . Обозначим  $K_r(a) := \Lambda^r R(F)$ . Определим гомоморфизмы  $R$  модулей  $d_r : K_r(a) \rightarrow K_{r-1}(a)$  на базисных тензорах:  
где шляпка обозначает пропуск элемента. Докажите, что последовательность гомоморфизмов  
$$0 \rightarrow K_n(a) \xrightarrow{d_n} \dots \xrightarrow{d_2} K_1(a) \xrightarrow{d_1} K_0(a) = R \rightarrow R/I \rightarrow 0$$
  
является комплексом (он называется комплексом Кошуля). Покажите, что если  $(a_1, \dots, a_n)$  – регулярная последовательность (то есть  $a_i$  не является делителем нуля по модулю  $(a_1, \dots, a_{i-1})$  для каждого  $i$ ), то комплекс Кошуля точен.
6. Пусть  $A$  – коммутативное кольцо. Предположим, что для любого  $\mu \in \text{Spec}(A)$  кольцо  $A_\mu$  не содержит ненулевых нильпотентов. Докажите, что в таком случае само кольцо  $A$  не содержит ненулевых нильпотентов. Верно ли, что если все  $A_\mu$  области целостности, то  $A$  – тоже область целостности?
7. Элементы теории категорий: категории, функторы, сопряжённые функторы.
8. Тензорные произведения модулей.
9. Ограничение и расширение скаляров.
10. Полилинейная алгебра: симметрическая, внешняя степени, тензорная алгебра.

#### **Критерии оценивания**

Оценка "Отлично" (10) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы, код оформлен в едином удобочитаемом стиле.

Оценка "Отлично" (9) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы.



Оценка "Отлично" (8) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продemonстрирован грамотный подход к решению задач.

Оценка "Хорошо" (7) - полностью решены все задачи. Допущены несущественные ошибки.

Оценка "Хорошо" (6) - полностью решено большинство задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Хорошо" (5) - полностью решено две трети задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (4) - полностью решено более половины задач. В остальных задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (3) - полностью решено более половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (2) - решено менее половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (1) - не решено ни одной задачи.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и (или) путем организации специального опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.

При проведении устного дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося на дифференцированном зачете не должен превышать одного астрономического часа.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, конспектами лекций или другими материалами.